PROBLEMAS OLIMPIADA

Sesión de preparación 10-03-2017

Problema 1 Sea γ_1 una circunferencia de radio r_1 y P un punto exterior que dista a de su centro. Se suponen construidas las dos rectas tangentes a γ_1 desde P, y sea γ_2 una circunferencia de radio menor que el de γ_1, tangente a esas dos rectas y a γ_1; en general, una vez construida la circunferencia γ_n se construye otra γ_{n+1} de radio menor que el de γ_n, tangente a las dos rectas citadas y a γ_n. Determinar:

1. La expresión general del radio de γ_n.
2. El límite de la suma de las longitudes de las circunferencias γ_1, γ_2, ..., γ_n.

Problema 2. (Olimpiada 2015. Fase Local) Sean r y s dos rectas paralelas y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r, sea C el punto de la recta s tal que $\angle BAC = 90$, y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de qué punto B de la recta tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.

Problema 3. (Olimpiada 2015. Fase local) En una recta tenemos cuatro puntos A, B, C y D en ese orden, de forma que AB=CD. E es un punto fuera de la recta tal que CE=DE. Demuestra que $\angle CED = 2\angle AEB$ si y solo si AC=EC.

Problema 4. (Olimpiada 2015. Fase Local) El triángulo ABC es isósceles en C y sea Γ su circunferencia circunscrita. Sea M el punto medio del arco BC de Γ que no contiene a A y sea N el punto donde la paralela a AB por M vuelve a cortar a Γ. Se sabe que AN es paralela a BC. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de ABC?

Problema 5. (Olimpiada 2005. Fase Nacional) En un triángulo de lados a, b, c el lado a es la media aritmética de b y c. Probar:

1. $0 \leq A \leq 60$.
2. La altura relativa al lado a es tres veces el inradio r.
3. La distancia del circuncentro al lado a es $R - r$, siendo R el circunradio.

Problema 6. (Olimpiada 1994. Fase Nacional) El ángulo A del triángulo ABC mide 2/5 de recto, siendo iguales sus ángulos B y C. La bisectriz del ángulo C corta al lado opuesto en el punto D. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresar la medida a del lado BC en función de la medida b del lado AC sin que aparezcan en la expresión razones trigonométricas.

Problema 7. (Olimpiada 1994. Fase Nacional) Sea OXYZ un triedro trirrectángulo de vértice O y aristas X, Y y Z. Sobre la arista Z, se toma un punto fijo C tal que OC=c. Sobre X e Y se toman respectivamente dos puntos variables P y Q de modo que la suma OP+OQ sea una constante dada k. Para cada par de puntos P y Q, los cuatro puntos, O, C, P y Q están en una esfera cuyo centro W se proyecta sobre el plano OXY. Razonar cuál es lugar geométrico de esa proyección. Razonar también cuál es lugar geométrico de W.

Problema 8 Dados el triángulo equilátero ABC, de lado a, y su circunferencia circunscrita, se considera el segmento circular limitado por la cuerda AB y el arco (de 120º) con los mismos extremos. Al cortar este segmento circular con rectas paralelas al lado BC, queda determinado sobre cada una de ellas un segmento, interior al segmento circular, con extremos en el arco y en la cuerda AB. Determinar la máxima longitud de esos segmentos rectilíneos.

Problema 9 Dado un número entero r, construir un triángulo rectángulo de lados enteros cuyo círculo inscrito tenga radio r.